EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

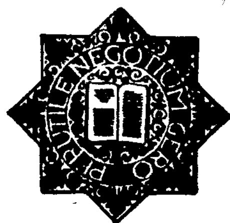
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

13e JAARGANG 1936/37, Nr. 6.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

auf S. 80[1]) von der Verjüngung bis ins Unbegrenzte, bis ins Unendliche gesprochen, was aber nichts anderes heisst, als dass diese Verjüngung im unendlich fernen Punkt ihr Ende findet.

Diese Untersuchungen wie auch die über die perspektivischen Abbildungen werden wesentlich dadurch erschwert, dass die Uebersetzung von Janitschek den sprachlichen und wissenschaftlichen Anforderungen keineswegs entspricht. Schon einfache Begriffe wie Rechteck, Punkt, Diagonale, Ebene, werden nicht klar erfasst, bei schwierigeren Begriffen wie parallel, gleichgerichtet, ähnlich ist die Erfassung des Sinnes ungleich komplizierter. Infolgedessen wäre eine ganz neuzeitliche Uebersetzung der schwierigen, konstruktiv-mathematischen Stellen dringend erwünscht.

Wenn man diese Schwierigkeiten beachtet, so findet man, dass Alberti zwar keinerlei Lehrsätze, Beweise, Einzelkonstruktionen gibt, dass aber sein Gedankengang in klarer Folge einen logischen Aufbau entwickelt. Schon die Begriffsbildung verrät Verständnis in der Formulierung und Handhabung: Zentrum (Auge), (Fig. 1), Gegenstandsebene, Bildebene, Achse, Horizont, Hauptpunkt H, Distanz (Zentralstrahl). Ueber den Sinn und über die Grösse der Distanz für den praktischen Maler hat er ganz klare Vorstellungen.

Zur Erläuterung der Abbildungsidee führt Alberti den Sehstrahl ein und damit zeigt er, wie die Projektion des Punktes im Vordergrund steht. Von einem Sehstrahl zeigt er zu zwei und zu drei in die Höhe, d.h. er geht zur zentralprojektiven Abbildung von 2 und 3 Punkten über, er gelangt zur Sehpyramide (Abb. 1), zur Projektion eines Dreiecks.

Voraussetzung der bisherigen Betrachtung war die Parallelität von Bild- und Gegenstandsebene. Es ist der bekannte Fall ähnlicher Dreiecke, die auf proportionale Beziehungen führen. Aber Alberti betrachtet die Ebene nicht als fest, er verschiebt die Bildebene und studiert die Veränderlichkeit der Dreieckgrösse, er dreht auch die Gegenstandsebene, und er weist auf die *„Alteration"* bei der Drehung hin.

Aber er begnügt sich mit diesen allgemeinen Abbildungsideen nicht, der Mann der Praxis setzt sich durch: der Maler benötigte den frontalen quadratischen Raum, und deshalb entwickelt er die

---

[1]) De pictura.

„costruzione per dilucidazione", noch von Pietro Accolti (Lo inganno degli occhi, prospettiva pratica, Firenzo, 1625) die

Fig. 1.

legitime oder die *„costruzione legittima"* genannt.

In Fig. 2 ist die Konstruktion angegeben. Man dachte sich den Fussboden quadratisch getäfelt. Um das Bild dieses Fussbodens

Fig. 2.

zu bekommen, teilen wir die vordere Kante in 5 gleiche Teile ein, die wir mit den Punkten I, II .... VI bezeichnen. Von ihnen aus ziehen wir Geraden 1) nach H, 2) nach O. Letztere schneiden A VI in Punkten, durch die wir *Breitenlinien* zur vorderen Kante ziehen. Die Schnittpunkte der Breitenlinien mit den nach H strebenden ergeben das perspektive Bild der Täfelung.

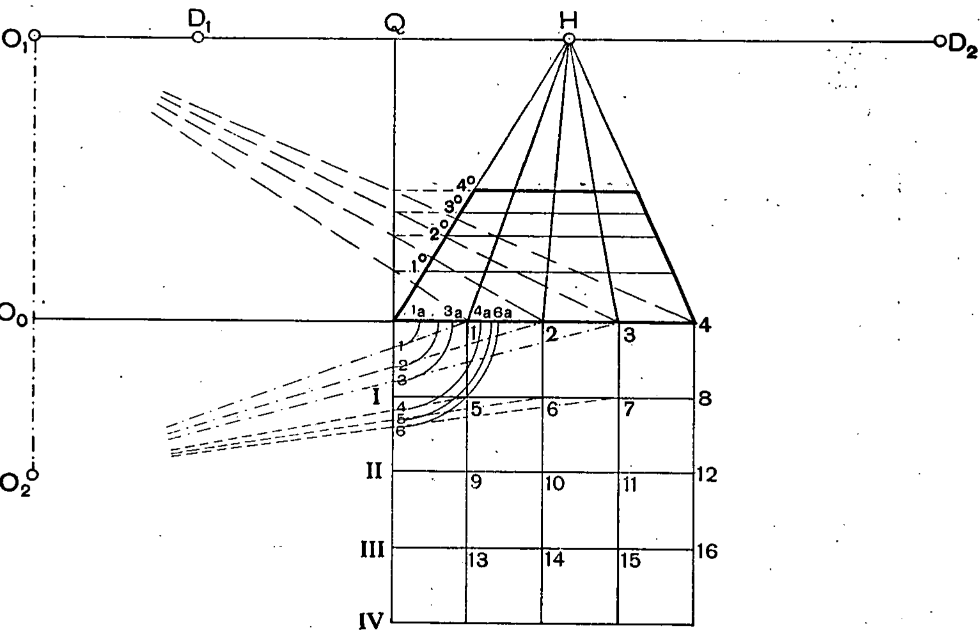


Fig. 3.

Zwar gibt Alberti, wie wir bereits hervorgehoben haben, keine Begründung für die Konstruktion. Wir wollen sie aber durch die Fig. 3 geben: Das Auge ist durch den Aufriss O_1 und den Grundriss O_2 gegeben. Im Grundriss liegen die 16 Quadrate, von denen ein zentralkollineares Bild gefunden werden soll und zwar mit der Kante 1—4 auf der Achse. Der Konstruktionsweg ist ohne weiteres aus der Figur zu ersehen.

Vergleichen wir die Figur 3 mit der Figur 2, so finden wir, dass die Alberti'sche Konstruktion nur der Aufriss der gesamten Zeichnung ist.

Wir wissen und bedauern es, dass wir von Alberti's Hand keine Zeichnung zu seiner Perspektive haben. Wir würden durch sie noch tiefer in das Wissen dieser Disziplin in damaliger Zeit

eindringen können. Aber es ist von besonderer Bedeutung, dass der Künstler, der sich sehr stark mit *„De Pictura"* auseinandergesetzt hat, nämlich Leonardo da Vinci (1452—1519), und der seine Abhängigkeit auch bekannte, eine Reihe von Zeichnungen zu der Figur 2 gemacht hat. Wir finden sie in Band A von Charles Ravaisson—Mollien, Les manuscripts de Leonardo da Vinci, Paris 1881, und zwar auf den Blättern 39, 41, 42 u.a. Als Beispiel bringen wir eine Abbildungsserie aus Fol. 39 (Fig. 4a u. 4b).

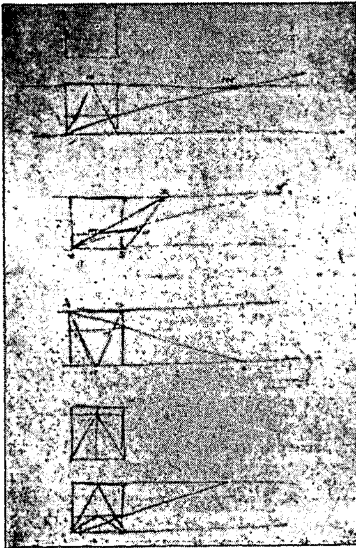


Fig. 4*a*.

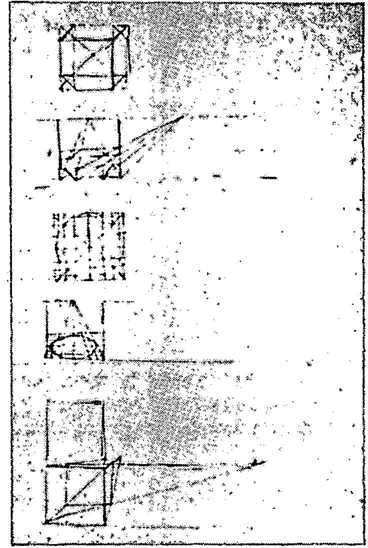


Fig. 4*b*.

Ausser diesem rein mathematisch begründeten Weg gibt Alberti an vielen Stellen technische Hinweise; er kämpft auch gegen das Falsche, so gegen eine Täfelungsperspektive, in der die Felder die Höhe a, $\frac{2}{3} \cdot a$, $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot a\right]$ u.s.f. haben könnten. Herr Fr. Schilling[1]) hat diese Konstruktion rein mathematisch untersucht.

Womit Alberti noch nicht konstruktiv fertig geworden ist, das ist die Abbildung des Kreises. Er hilft sich mit seiner Schleier- oder

[1]) Zschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik. Bd. 2, 1922, Heft 4 S. 250 ff: Ueber eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Battista Alberti.

Kordinatenmethode, wie wir sie in Fig. 4b. als 3. und 4. Figur finden.

Erwähnt sei noch, dass in den beiden oberen Figuren ein 8-Eck perspektivisch abgebildet ist, während die beiden unteren Figuren zeigen, wie Leonardo nach der Anweisung von Alberti den Höhenmasstab abgetragen hat, um einen Würfel in Zentralprojektion erhalten zu können.

Schauen wir noch einmal auf Alberti's Della pictura libri tre mit dem Willen der Synthese zurück, so finden wir, dass diese bedeutsame Abhandlung das erste Werk in der gesamten Kunstgeschichte ist, das der Kunst brauchbare Kunstbegriffe geben wollte und tatsächlich auch gegeben hat.

Wir Mathematiker können stolz darauf sein, dass nicht nur der ganze Aufbau dieses Werkes streng logisch sich formt, sondern dass auch die Fundamente in dem formalen Teil die Mathematik suchen und auch finden.

Alberti sagt es selbst: „Das erste Buch ist ganz mathematischen Inhalts; es zeigt, aus welchen *natürlichen* Wurzeln die holde und erlauchte Kunst emporwachse". Aber die Lektüre der drei Bücher zeigt, dass auch das zweite und das dritte Buch von echt mathematischem Denken getragen sind.

KORRELS.

XIV. Dat er met „onnauwkeurige getallen" nog wel eens al te lichtvaardig wordt omgesprongen, moge blijken uit het volgende voorbeeld.

In „Ons Tijdschrift", maandblad voor electriciteitshuishoudkunde, economie en electrotechniek, 12de jaargang, Maart 1933, no. 12, blz. 376 staat een prijsvraag vermeld, — met de uitslag. De deelnemers hadden te raden gekregen, welke afstand de punt van de grote wijzer van een klok, die in de etalage van een winkel was uitgestald, in een vol jaar zou afleggen. De uitslag vermeldde o.m.: „De lengte van bedoelden wijzer, gerekend van het hart van het bevestigingspunt af, was precies 45 cm, ... de omtrek derhalve, nauwkeurig berekend, 2,82743338815 meter; deze afstand wordt per uur afgelegd. Per dag wordt afgelegd

$$24 \times 2{,}82743338815 = 67{,}8584013156 \text{ meter,}$$

per jaar

$$365 \times 67{,}8584013156 \text{ meter} = 24{,}768316480914 \text{ km.}$$

De 2 oplossingen die dit getal het dichtst benaderden waren beide: 24,767586 km."

Wat een quasi-nauwkeurigheid!

Onderstelt men, dat de lengte van de wijzer in mm nauwkeurig is gemeten, dan kan men gemakkelijk nagaan, hoeveel decimalen in het antwoord verantwoord zijn.

$r = 44{,}9$ geeft voor de afgelegde weg	24,713 . . .	km,
$r = 45$ geeft	24,768 . . .	km,
$r = 45{,}1$ geeft	24,823	km,
zodat men dient te nemen:	24,8	km

(mogelijke fout < 1 hm).

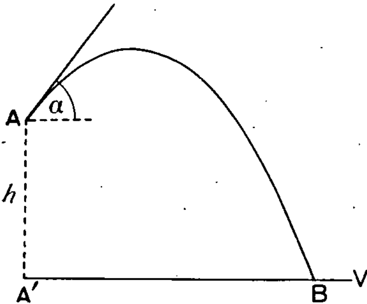
De 2 oplossingen, die hierboven vermeld staan, geven 5 decimalen meer: hiermee correspondeert een schatting van de lengte van de wijzer in honderdsten van 1 micron nauwkeurig! Echter is dit nog niet nauwkeurig genoeg geweest in het oog van de jury; deze decreteert: de lengte was „precies 45 cm" en er komt

een afgelegde weg met 11 dec. meer dan wij konden verantwoorden.

Zal het opgegeven getal geheel verantwoord zijn, dan moet men aannemen, dat de wijzer gemeten is tot op onderdelen van een milli-micron nauwkeurig! JOH. H. WANSINK.

XV. DE MAXIMALE WORPSWIJDTE.

Uit een punt A, gelegen op de afstand AA′ $= h$ boven een horizontaal vlak V, wordt een stoffelijk punt met de snelheid v onder de elevatiehoek α weggeworpen; als V in B wordt getroffen, voor welke waarde van α is A′B dan zo groot mogelijk?



Is g de versnelling der vrije val, dan heeft men

$$h = -vt \sin\alpha + \tfrac{1}{2} gt^2$$
$$A'B = vt \cos\alpha.$$

Eliminatie van t geeft na enige herleiding:

$$A'B = \frac{v^2}{g} \cos\alpha\,(\sin\alpha + \sqrt{p + \sin^2\alpha}),$$

waarbij $p = \dfrac{2gh}{v^2}$. Het gevraagde maximum kan worden gevonden door de afgeleide naar α gelijk aan nul te stellen. (vgl. bv. L a m p e, Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. 58, p. 5 (1927)). Wenst men de differentiaalrekening te vermijden, dan kan men als volgt te werk gaan. Is β de scherpe hoek, waarvoor geldt

$$\sqrt{1+p}\,\cos\beta = \cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dan heeft men

$$A'B = \frac{v^2}{g}\cos\alpha\,(\sin\alpha + \sqrt{(1+p) - \cos^2\alpha}) = \frac{v^2}{g}\cos\alpha\,(\sin\alpha +$$
$$+ \sqrt{1+p}\,\sin\beta) = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+p}\left(\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sqrt{1+p}} + \cos\alpha\,\sin\beta\right) =$$
$$= \frac{v^2}{g}\sqrt{1+p}\,(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta) = \frac{v^2}{g}\,.\,\sqrt{1+p}\,.\,\sin(\alpha+\beta).$$

A′B is dus zo groot mogelijk, als $\alpha + \beta = 90°$, dus als

$$\cos\beta = \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt, dat de maximale worp ontstaat bij de elevatiehoek α_m, bepaald door

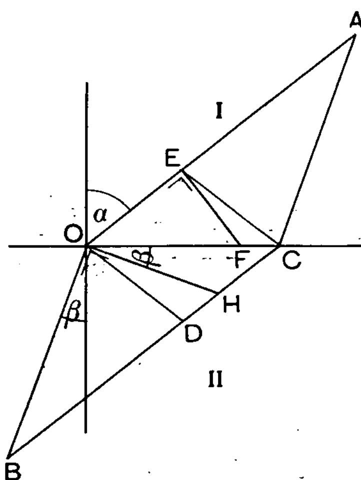
$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{1}{\sqrt{1+p}}.$$

De maximale waarde van A'B is $\frac{v^2}{g}\sqrt{1+p}$, een resultaat dat ook gevonden wordt door V te snijden met de veiligheidsparabool. Voor $h = 0$, $p = 0$ krijgt men de bekende uitkomst $\alpha_m = 45°$. Is $h > 0$, $p > 0$ (een in de athletiek optredende omstandigheid), dan is $\alpha_m < 45°$. De afleiding geldt ook voor $0 > h > -\frac{v^2}{2g}$, $0 > p > -1$; men heeft dan $\alpha_m > 45°$.

Wij herinneren nog aan de volgende merkwaardigheid. Bij de maximale worp is $t = \frac{v}{g \sin \alpha_m}$, de verticale component van de snelheid in B is dus gelijk aan $v \frac{\cos^2 \alpha_m}{\sin \alpha_m}$; daar de horizontale component $v \cos \alpha_m$ is, zal de richting van de snelheid in B met de normaal op V een hoek maken, gelijk aan α_m. (B ö g e l, Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. 59, p. 50, (1928)).

O. BOTTEMA.

XVI. Een elementair bewijs voor de stelling van Fermat, dat de tijd, die 't licht gebruikt voor het doorlopen van enige media, een extreem is, in 't bijzonder geval van 2 media, gescheiden door een plat vlak.



Zij AOB een lichtstraal.

Snelheid licht in I : v_1.

Snelheid licht in II : v_2.

Dus $\sin \alpha : \sin \beta = v_1 : v_2$ (1).

Zij C een punt rechts van O, zodat AC < AO. We willen bewijzen, dat de tijd nodig voor ACB groter is dan die voor AOB, dus dat:

$$\frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2} > \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} \text{ of, dat}$$

$$\frac{AO - AC}{v_1} < \frac{BC - OB}{v_2} \quad . \quad . \quad (2)$$

Zij BD = BO, $\angle$ BOH = 90°, dan ligt H tussen D en C.
Zij AE = AC, $\angle$ OEF = 90°, dan ligt F tussen O en C.

Nu is

$$\frac{AO - AC}{\sin \alpha} = \frac{OE}{\sin \alpha} = OF < OC < \frac{CH}{\sin \beta} < \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC - BO}{\sin \beta}.$$

Wegens (1) is dus ook

$$\frac{AO - AC}{\nu_1} < \frac{BC - BO}{\nu_2} \text{ h. t. b. w.}$$

Is AC $\geqq$ AO, terwijl C rechts van O ligt, dan volgt de stelling vanzelf. Ligt C links van O, dan is een analoog bewijs te geven.

Grimsehl geeft in zijn „Lehrbuch der Physik" een analoog bewijs, maar dat is voor leerlingen iets minder overzichtelijk.

P. BRONKHORST.

XVII. VERHASPELING VAN EIGENNAMEN.

Wanneer in Nederlandsche natuurkundeboeken de naam van Hans Christian Ørsted vermeld wordt, vindt men dezen naam veelal gespeld *Oerstedt*. Deze spelling is onjuist. Ten eerste is de *t* aan het einde verkeerd, ten tweede is *oe* geen aequivalent van ø. Stuit de spelling met ø op onoverkomelijke typografische bezwaren, dan kan men desnoods ö gebruiken. De naam wordt ongeveer als *eurstith* uitgesproken, waarin de th op het einde de stemhebbende Engelsche th aanduidt.

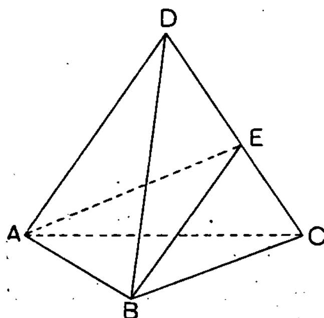
Den naam van Tycho Brahe vindt men vrijwel steeds gespeld als *Brahé*, met een accent aigu op de e. Dit heeft ten gevolge gehad, dat de naam Brahe wordt uitgesproken als brahee, met den klemtoon op de laatste lettergreep. Dit is verkeerd: de e draagt in de spelling geen accentteeken, en de tweede lettergreep heeft zoo weinig klemtoon, dat zij bijna wordt ingeslikt, en de naam eenlettergrepig wordt uitgesproken.

Het bovenstaande wordt aanbevolen in de aandacht van wie natuurkunde- en cosmographieboeken schrijven of herzien.

J. H. S.

XVIII. OVER HET BISSECTRICE-VLAK VAN EEN TWEEVLAKSHOEK.

Menigmaal zijn onze leerlingen geneigd aan te nemen, dat het bissectricevlak van ∠ D—AB—C van een viervlak DABC tevens ∠ DBC middendoor zal delen.



Naast onze pogingen om hen met behulp van een passer en een half opengeslagen boek e.d. enig inzicht in deze kwestie bij te brengen, kan, zodra ze over enige kennis van de inhouden beschikken, de volgende beschouwing dienst doen:

Als ∠ CABE = ∠ DABE, dan is, zoals gemakkelijk is aan te tonen;

$$CE : DE = \text{opp. } ABC : \text{opp. } ABD.$$

Nu zal alleen dàn ∠ CBE = ∠ DBE zijn als tevens

$$CE : DE = BC : BD, \text{ dus als}$$

$$\text{opp. } ABC : \text{opp. } ABD = BC : BD, \text{ of}$$

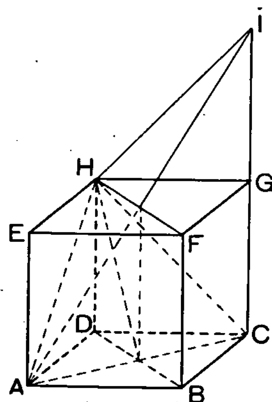
$$\tfrac{1}{2}\, AB \,.\, BC \sin ABC : \tfrac{1}{2}\, AB \,.\, BD \sin ABD = BC : BD, \text{ of}$$

$$\sin ABC = \sin ABD,$$

dus als ∠ ABC en ∠ ABD gelijk of elkaars supplement zijn.

Een reeds in het eerste begin bruikbare illustratie van gevallen van gelijkheid en ongelijkheid van de hoeken in een vlak, dat geen standvlak is, kan ontleend worden aan de kubus:

In een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ deelt het diagonaalvlak BDH, bissectrice-vlak van ∠ E—DH—G, wèl ∠ AHC, maar niet ∠ AHG middendoor. Wèl weer ∠ AHI, als I bepaald wordt door CG met zich zelf te verlengen.



J. W. D.

HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A. *Quellen.* Band 3, Teil 3. 1937. Band 4. 1936. Abteilung B. *Studien.* Band 3, Hefte 2, 3, 4, 1936.

Sedert de vorige Historische Revue is de publicatie van de *Quellen und Studien* aanmerkelijk gevorderd. In de afdeeling *Quellen* verscheen van de hand van O. Neugebauer het derde deel van zijn *Mathematische Keilschrift=Texte,* dat van sommige tot dusver slechts voorloopig onderzochte teksten de definitieve publicatie brengt en dat bovendien de intusschen nieuw gedane vondsten bekend maakt. Hiermee is het groote werk, dat ons inzicht in de ontwikkeling der wiskunde zoo sterk heeft verdiept en dat bij voortgezette bestudeering nog tal van nieuwe resultaten belooft, voltooid. Als Band 4 van de *Quellen* levert Karl Garbers een uitgave met vertaling van een werk van Tabit b. Qurra over vlakke zonnewijzers; men had tot dusver al-Battani als oudste bron voor dergelijke onderzoegen beschouwd; het blijkt nu, dat het werk van den ouderen Tabit veel verder gaat dan het zijne.

In de nieuw verschenen afleveringen van de *Studien* wordt een belangrijke plaats ingenomen door de voortzetting van het zeer omvangrijke en diepgaande artikel van Jacob Klein *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra.* De schrijver bestudeert thans zeer uitvoerig de *Arithmetica* van Diophantos binnen het kader van de Grieksche opvattingen over logistiek, toont daarna aan, welke principieele veranderingen die opvattingen hebben ondergaan, toen Vieta de algebra verder ontwikkelde en behandelt ten slotte het getalbegrip bij Stevin, Descartes en Wallis. De bestudeering van het stuk kan aan ieder, die zich voor de geschiedenis van rekenkunde en algebra en voor den philosophischen achtergrond van beide vakken interesseert, ten sterkste worden aangeraden, waarbij echter een woord van waarschuwing voor den

zeer moeilijk aansprekenden, hier en daar ongenietbaar-Duitschen betoogtrant niet mag ontbreken. O. Becker spreekt in nieuwe *Eudoxos-Studien* over de sporen van een continuiteitsaxioma in den geest van dat van Dedekind in den tijd van en voor Eudoxos, over de beperkte geldigheid van het principium tertii exclusi in de Grieksche wiskunde en over de Eudoxische theorie van de ideeën en de kleuren. Dezelfde auteur behandelt verder den tekst van het befaamde door Simplikios weergegeven bericht van Eudemos over de quadratuur van de maantjes door Hippokrates van Chios en schrijft over de leer der even en oneven getallen in het negende boek van de *Elementen* van Euclides.

O. Neugebauer levert een nieuwe bijdrage tot zijn *Studien zur Geschichte der antiken Algebra,* waarin hij de Grieksche theorie van aanpassing van oppervlakken naar oorsprong en uitwerking verklaart als geometrische inkleeding van de Babylonische normaalvormen der vierkantsvergelijking, interessante opmerkingen maakt over het Babylonische getalbegrip en ten slotte op de sterke verandering wijst, die de historische positie van de Grieksche mathesis heeft ondergaan als gevolg van de nieuwe inzichten over aard en inhoud van die der Babyloniers. A. Donald Steele publiceert zijn dissertatie *Ueber die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik,* waarin de tot dusver wat oppervlakkig behandelde kwestie, in hoeverre in de Grieksche wiskunde de beperking van de constructiemiddelen tot passer en lineaal heeft gegolden, nauwkeurig wordt onderzocht. K. Schlayer stelt de vraag *Wie lautete das Aristotelische Fallgesetz?* en verheldert in de beantwoording daarvan in het bijzonder de beteekenis van de evenredigheid van snelheid en gewicht. De conclusie is, dat deze evenredigheid uitdrukkelijk uitgesproken wordt alleen voor lichamen van gelijk specifiek gewicht, maar dat ze waarschijnlijk wel algemeen bedoeld zal zijn.

Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter.* Dritter Band. *Proportionen und Gleichungen.* Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin—Leipzig. Walter de Gruyter & Co. 1937. 239 blz.

De nieuwe bewerking van het derde Deel van Tropfke's onschatbare standaardwerk vormt een sprekend bewijs voor de

ontwikkeling, die de kennis van de geschiedenis der wiskunde in de 15 jaren, die sedert het verschijnen van de tweede editie zijn verstreken, heeft ondergaan. In die jaren verscheen de mooie uitgave van den papyrus-Rhind door Chace; de papyrus—Moskou en de papyrus Michigan—620 werden ontcijferd; Neugebauer wierp door zijn *Mathematische Keilschrift-Texte* en de verhandelingen, die daaraan voorafgingen, een nieuw licht op de prae-Helleensche phasen der wiskunde en verruimde daardoor in sterke mate het tijdvak, dat binnen den gezichtskring der historie valt. Al de nieuwe vondsten, die op deze wijze aan het licht zijn gekomen, zijn, voorzoover ze op evenredigheden en vergelijkingen betrekking hebben, door Tropfke in de derde editie van het derde deel verwerkt, waardoor ook dit deel weer geheel op de hoogte van den tijd is komen te staan.

Ook elders toont de nieuwe uitgave veelvuldige sporen van grondige herziening: er is meer geprofiteerd van het vele materiaal, dat de werken van Diophantos bevatten; de behandeling van de bijdragen der Arabieren is uitgebreid; overal zijn meer voorbeelden gegeven of de toelichting van wat er stond, is uitvoeriger gemaakt. Concordantietabellen achterin maken het mogelijk, de registers aan het eind van Deel VII der tweede uitgave te blijven gebruiken.

Een enkele opmerking: het problema bovinum van Archimedes leidt niet tot een stelsel van drie vergelijkingen met vier onbekenden, maar tot een van zeven met acht onbekenden, die nog aan twee bijcondities onderworpen zijn.

H. D. P. Lee. *Zeno of Elea. A Text, with Translation and Notes.* Cambridge Classical Studies. Cambridge University Press. 1936. 125 blz.

Wij bezitten helaas geen van de befaamde geschriften meer, waarin Zenoon van Elea de paradoxen over veelheid, plaats en beweging heeft ontwikkeld, die na eeuwen lang als staaltjes van sophistiek te zijn geminacht, het in onzen tijd tot zoo hooge waardeering hebben weten te brengen, dat Bertrand Russell ze zelfs als „immeasurably subtle and profound" kon bewonderen. Korte mededeelingen erover bij Aristoteles, elliptische citaten, waaraan eerst een philologische speurzin, die aan de subtiliteit der moderne mathesis was gescherpt, een redelijke beteekenis heeft

kunnen hechten; langere, maar op de kritieke punten even ondui-delijke uitleggingen van de commentatoren: ziedaar alles, wat er van de werken van den grondlegger van de dialectiek is overgebleven.

Deze schamele, maar daardoor dubbel kostbare resten te verzamelen, in zoo goed mogelijken staat te brengen en door vertaling en commentaar toe te lichten, is de taak geweest, die de schrijver van het hierboven vermelde werkje ten gerieve van allen, die in het Grieksche denken belang stellen, op zich heeft genomen. Hij geeft eerst alle teksten, waarin de Eleatische hypothese van de eenheid van het zijnde wordt verdedigd door een reductio ad absurdum van de pluraliteitsstelling; daarna de paradox van de plaats, die, wil ze iets zijn, in een plaats moet zijn en zoo voort in infinitum; vervolgens de vier bewegingsantinomieën en tot slot de aporie van den gerstekorrel, die geruischloos valt, terwijl een schepel vol dat hoorbaar doet.

Die Elemente von Euklid. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. IV Teil. (Buch X). Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig 1936. 119 blz.

Thaer's vertaling van de *Elementen* van Euclides is thans gevorderd tot het befaamde tiende boek, waarin de classificatie van irrationale lijnstukken wordt gegeven. In de aanteekeningen worden de algebraische uitdrukkingen voor de gedefinieerde grootheden meegedeeld.

Kurt Vogel. *Beiträge zur griechischen Logistik.* Erster Teil. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Abteilung. München 1936. S. 357—472.

Na het in 1869 gepubliceerde werk van Friedlein over cijferschrift en rekenmethoden van de Grieken en Romeinen is er geen werkelijk volledige behandeling van het Grieksche rekenen (logistiek) meer verschenen; het beschikbare materiaal is echter in dien tijd door nieuwe vondsten en uitgaven aanzienlijk uitgebreid; daardoor was de litteratuur langzamerhand duidelijk achter geraakt bij het onderzoek en aan een hernieuwde behandeling van het onderwerp bestond reeds lang groote behoefte.

Daarin wordt thans op uitstekende wijze voorzien door het hierboven aangekondigde werk van den Duitschen historicus der mathesis Kurt Vogel, die zich reeds door talrijke verhandelingen over Helleensche en prae-Helleensche wiskunde groote verdiensten heeft verworven en die zich ook thans op even heldere als degelijke wijze van zijn taak heeft gekweten. De legende, dat men over het practische rekenen van de Grieken zoo weinig te weten kan komen, wordt door zijn werk onverbiddellijk weerlegd; men kan er vrij veel van vertellen, maar het kost een groote mate van speurzin en geduld, om al het verspreide materiaal te verzamelen.

Het thans verschenen eerste deel behandelt de hoofdbewerkingen met geheele getallen en breuken; het zal door een tweede worden gevolgd, waarin de practische toepassingen van het rekenen aan de orde zullen komen.

Kurt Vogel, *Wann beginnt die Algebra?* Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule. 9. Semester. Winter 1936/37. Mathematisches Seminar. Münster i. Westf. S. 107—123.

De vraag naar het begin van de algebra vereischt natuurlijk een voorafgaande vaststelling van de beteekenis van den term; verstaat men er „leer der vergelijkingen" onder, dan zal het antwoord anders luiden, dan wanneer men aan algemeene rekenkundige bewerkingen denkt. De schrijver toont aan, dat, ook als men de eerste (meer beperkte) beteekenis aanvaardt, de oorsprong van het vak veel verder weg ligt, dan men vroeger gewoonlijk gedacht heeft en ook thans nog veelvuldig denkt. In het bijzonder vertoont de Babylonische wiskunde een sterk uitgesproken algebraisch karakter.

A. Rome. *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste* Tome II. Théon d'Alexandrie. *Commentaire sur les livres* 1 *et* 2 *de l'Almageste.* Studie e Testi No. 72. Città del Vaticano. Biblioteca Apostolica Vaticana. 1936. blz. LXXIX—CVII. 317—805.

In de serie commentaren van Pappos en Theoon van Alexandria op den *Almagest,* die door den Leuvenschen hoogleeraar A. Rome met toelichtingen worden uitgegeven, is thans het tweede deel,

Theoon's commentaar op de Boeken I en II bevattend, verschenen. Evenals in deel I gaat aan den tekst een inleiding vooraf, die opmerkingen over vroegere edities en vertalingen en aanteekeningen over Theoon bevat en waarin de schrijver weer de lectuur van het werk vergemakkelijkt door een uitvoerige en door voorbeelden verduidelijkte behandeling van de in den *Almagest* voorkomende tafels en het gebruik daarvan.

W. E. van Wijk. *Le Nombre d'Or. Etude de Chronologie technique suivie du Texte de la Massa Compoti d'Alexandre de Villedieu. Avec Traduction et Commentaire.* La Haye. Martinus Nijhoff. 1936. 158 blz.

Dit werk bevat in de eerste plaats een editie van den in de Middeleeuwen zeer verspreiden, maar nooit gedrukten tekst van de *Massa Compoti* van Alexander de Villa Dei (of Dolensis), waarin de auteur van het befaamde *Doctrinale puerorum* en van het arithmetisch poëem *Carmen de Algorismo* nog eens weer zijn vaardigheid in het samenstellen van metrische verhandelingen toont door de kalenderrekening in hexameters uiteen te zetten.

Deze tekst, die 509 verzen telt en die zonder toelichting voor niemand begrijpelijk zou zijn, die zich niet langdurig in de middeleeuwsche computistiek verdiept heeft, wordt vergezeld door een vertaling en een zeer uitvoerigen commentaar, die een indrukwekkend getuigenis vormt van de degelijkheid, waarmee Dr. van Wijk deze moeilijke materie beheerscht.

Omdat echter de historische beteekenis van het belangrijke geschrift, dat hij hier toegankelijk maakt, ook door nauwgezette bestudeering van den inhoud nog niet geheel duidelijk zou zijn, heeft hij aan zijn editie ervan een uitvoerige studie over de ontwikkeling van den middeleeuwschen kalender doen voorafgaan, waardoor hij een welkome aanvulling geeft van zijn voor enkele jaren verschenen studie over de Gregoriaansche kalenderhervorming.

Ieder, die zich voor het probleem der tijdrekening interesseert, zal goed doen, de diepgaande studie van Dr. van Wijk ter hand te nemen. Dat de lectuur verre van gemakkelijk is, vindt in de intrinsieke moeilijkheden van het onderwerp zijn gereede verklaring; de schrijver heeft van zijn kant geen moeite gespaard, om deze moeilijkheden te helpen overwinnen; men moet hem zeer

dankbaar zijn voor het resultaat van zijn zorgvuldige onderzoekingen.

C. M. Waller Zeper. *De oudste Intresttafels in Italie, Frankrijk en Nederland met een herdruk van Stevins „Tafelen van Interest".* Amsterdam. Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij. 1937. 95 en 92 blz.

Dit Leidsche proefschrift bestaat uit twee deelen, een geschiedenis der interestrekening tot in de 17e eeuw, voornamelijk beschouwd in verband met het ontstaan van interesttafels, en een herdruk van Stevin's *Tafelen van Interest.* Na een korte inleiding over de interestrekening in de oudheid (waarbij het zeer vreemd aandoet, dat de schrijver, die op blz. 1 nog wel Neugebauer's *Vorlesungen* noemt, niets schijnt te weten van Babylonische praestaties op dit gebied), wordt kort bericht over rentevraagstukken in het *Liber Abaci* (de historische bijzonderheden, die over Fibonacci worden meegedeeld, lijken van twijfelachtige waarde; bij Loria, die in deze zeer deskundig moet worden geacht, kan men de zaak althans heel anders verteld vinden) en over de oudst bekende geschreven Italiaansche interesttafels. Na een overzicht van oude boeken over koopmansrekenen in Italie en Frankrijk wordt dan uitvoerig over Jean Trenchant gehandeld, waarna de Nederlandsche auteurs Stevin, Wentzel, van Coelen (of van Ceulen), Verkammen en de Dekker elk afzonderlijk aan de orde komen.

Hoewel de schrijver er wel in geslaagd is, allerlei belangwekkende dingen uit de geschiedenis der interestrekening te verzamelen, lijkt ons zijn werk niet in alle opzichten geslaagd. Vooreerst zijn groote gedeelten ervan volslagen onleesbaar, doordat lange reeksen van boektitels in den tekst zijn afgedrukt inplaats van in de noten, wat het boek meer op een catalogus van een bibliotheek dan op een historische of mathematische verhandeling doet lijken. Deze bibliographische hypertrophie leidt dan echter ook nog tot verwaarloozing van de eerste en eigenlijke taak, die den schrijver gesteld was: uitleggen van de historische situatie en interpretatie van moeilijkheden. Zoo vraagt men op blz. 13 vergeefs naar de beteekenis van de uitdrukking *Del meritar a capo d'anno,* op blz. 21 naar die van *Et la fin le moyen de metre un exercit en betaille;* op blz. 30 wordt over „de leeningskwestie van den Franschen Koning" gesproken, terwijl pas later verteld wordt, wat dat voor

kwestie was. Op blz. 14 wordt de lezer geacht te weten, wie Giovanni Sfortunati van Siena was. En ten slotte wordt het werk van Stevin afgedrukt zonder den doorloopenden commentaar, die daarbij zou hebben gepast. De schrijver doet b.v. geen enkele poging om het merkwaardige verschijnsel te verklaren, dat Stevin altijd met tafels $A_{\overline{n}|}$ en $a_{\overline{n}|}$ werkt.

Een eigenaardigheid van den betoogtrant van den schrijver bestaat in het in extenso afdrukken van passages om te bewijzen, dat er iets niet in staat. Zoo vindt men op blz. 53 een Fransche vertaling van een passage uit de *Tafelen van Interest* opgenomen ten bewijze, dat daarin tusschen het formuleeren en het oplossen van het gestelde probleem geen kritiek op Trenchant wordt uitgeoefend. Het ontgaat ons, waarom hieraan meer bewijskracht moet worden toegekend dan aan de simpele vermelding van het feit, dat die kritiek niet wordt uitgeoefend. Op blz. 60 heeft men iets dergelijks.

We merken ten slotte nog op, dat op blz. 1 de naam van O. Neugebauer geciteerd wordt (slecht geciteerd; het is niet Quellen und Studien Bd. I, maar Qu. und St. Abteilung B, Band I) ter ondersteuning van een opvatting over Babylonische vermenigvuldigingstafels, die ter geciteerder plaatse door hem als „unhaltbare Spekulation" wordt afgewezen.

Uit het bovenstaande blijkt wel, dat de dissertatie van Dr. Waller Zeper eenige ernstige methodische tekortkomingen vertoont, wat des te meer verbaast, omdat een proefschrift toch onder deskundige leiding pleegt te worden bewerkt.

Johannes Kepler, *Das Weltgeheimnis. Mysterium Cosmographicum.* Uebersetzt und eingeleitet von Max Caspar. München und Berlin. R. Oldenbourg. 1936. XXXI en 146 blz.

In 1596 verscheen het eerste werk van Johannes Kepler, getiteld *Prodromus Dissertationum Cosmographicarum continens Mysterium Cosmographicum de admirabili Proportione Orbium Coelestium,* waardoor hij de aandacht van alle astronomen op zich vestigde en dat de directe aanleiding werd tot zijn, voor de ontwikkeling der natuurwetenschap zoo zegenrijke betrekking tot Tycho Brahe. Het werk bevat een poging, om een regelmaat in den bouw van het planetenstelsel aan te toonen en daarbij tevens te verklaren, waarom er juist zes planeten zijn. Deze twee problemen worden

gelijktijdig opgelost. Kepler spreekt de stelling uit, dat de opvolgende planetenbanen telkens liggen op bollen, die om een regelmatig veelvlak en in een ander beschreven zijn en hij beschouwt dus het aantal zes der planeten als een onmiddellijk gevolg van het mathematische feit, dat er juist vijf regelmatige veelvlakken bestaan.

Van dit werk liet de Duitsche Kepler-kenner Prof. Max Caspar, die zich ook door het toegankelijk maken van de *Astronomia Nova* zoo groote verdiensten voor de geschiedenis der astronomie heeft verworven, in 1923 een vertaling verschijnen, die thans in een nieuwe uitgave het licht heeft gezien. Hij leidde haar in met een voortreffelijke toelichting en voegde er alle aanteekeningen aan toe, waardoor Kepler zelf bij den herdruk van het werk in 1621 zijn vroegere uiteenzettingen heeft verduidelijkt en verbeterd.

De uitmuntende vertaling, die Prof. Caspar van den moeilijken Latijnschen tekst van het origineel leverde, maakt het mogelijk op weinig inspannende wijze van het hoogst oorspronkelijke en interessante werk van Kepler kennis te nemen.

Dr. Hans Schimank. *Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, ein deutscher Staatsman, Denker und Forscher.* Magdeburger Kultur- und Wirtschaftsleben. No. 6. Herausgegeben von der Stadt Magdeburg. 1936. 78 blz.

De welverdiende reputatie, die Otto Gericke (zoo luidde de naam van den Maagdeburger patricierszoon voor zijn verheffing in den adelstand) op grond van zijn onderzoekingen over luchtdruk geniet, dreigt wel eens de herinnering aan het aan daden rijke leven van den leider en onvermoeiden pleitbezorger van een rampzalige stad in een bewogen tijdvak der historie te verdringen en de waardeering van het wetenschappelijke werk, dat hij door zijn experimenteele behandeling der electrostatica en door zijn theoretische beschouwingen over kosmische physica heeft verricht, te belemmeren.

Tegen de eenzijdigheid van den gebruikelijken kijk op Guericke's persoonlijkheid kan het vlot geschreven en zeer fraai geillustreerde werkje van Dr. Schimank, dat de stad Maagdenburg ter gelegenheid van den 250en terugkeer van den sterfdag van haar vroegeren burgemeester heeft doen verschijnen, een voortreffelijk middel

zijn. De schrijver van de *Experimenta nova Magdeburgica de vacuo spatio* herleeft hier in den vollen omvang van zijn denken en handelen; men bewondert zijn wetenschappelijk werk nog des te meer, wanneer men de omstandigheden leert kennen, waaronder hij het heeft moeten verrichten.

Correspondance du P. Marin Mersenne, religieux minime. Publiée par Mme Paul Tannery. Editée et annotée par Cornelis de Waard avec la collaboration de René Pintard. II. 1628—1630. Gabriel Beauchesne. Paris. 1936. 705 blz.

Van de historisch zoo uiterst belangwekkende publicatie van de briefwisseling van Mersenne, die door onzen landgenoot C. de Waard wordt verzorgd, is thans het tweede deel, de correspondentie uit de jaren 1628—1630 bevattend, verschenen. Het nieuwe deel bevestigt den indruk, dien het eerste reeds wekte: de openbaarmaking van deze brieven beduidt een belangrijke bijdrage tot ons inzicht in de ontwikkeling van het natuurwetenschappelijk denken in een der meest beslissende perioden van zijn geschiedenis. Men is hier de onmiddellijke getuige van de gedachtenwisseling over alle brandende vraagstukken van den tijd tusschen de meestbevoegde beoordeelaars.

Opnieuw is de groote beteekenis van de uitgave voor een aanzienlijk deel te stellen op rekening van het voortreffelijke werk, dat de Waard in zijn inleidingen, aanteekeningen en toelichtingen verricht heeft. Wie zich ooit eenigszins op het gebied der wetenschapsgeschiedenis heeft bewogen, zal niet kunnen nalaten de grootste bewondering te gevoelen voor den omvang en de diepte van de kennis, die hij zich hierover verworven heeft.

Het verschenen deel ontleent een bijzondere waarde aan het feit, dat het op ruime schaal fragmenten uit het nog steeds onuitgegeven Journaal van Beeckman bekend maakt. Dit geschiedt voornamelijk in de aanteekeningen; in een der appendices worden echter bovendien nog de beschouwingen over de botsing meegedeeld, die Beeckman te boek heeft gesteld. De historische beteekenis van den Rector der Latijnsche School te Dordrecht wordt hierdoor opnieuw overtuigend aangetoond. En men betreurt het des te meer, dat van de plannen tot uitgave van dit merkwaardige dagboek nog nooit iets gekomen is.

Louis Trenchard More, *Isaac Newton. 1642—1727. A Biography*. New York—London. Charles Scribner's Sons. 1934. XII en 675 blz.

De Engelschen zijn wel heel trotsch op Newton, maar ze hebben tot dusver noch een moderne editie van zijn werken, noch een aan hedendaagsche eischen voldoende studie over zijn leven tot stand kunnen brengen. Op de eerste zullen we waarschijnlijk nog wel lang moeten wachten; voor de tweede heeft thans een Amerikaansch geleerde zorg gedragen.

Hij deed dat op voortreffelijke wijze, in rustige objectiviteit en met die veelzijdigheid van inzicht en belangstelling, die het begrijpen van een figuur als Newton vereischt. De eerste eigenschap stelde hem in staat tot een kritische houding tegenover de idealiseerende tendenties, die de Engelsche Newton-litteratuur van de 18e en 19e eeuw vertoont; de tweede maakte het hem mogelijk, om dat belangrijke deel van Newton's werkzaamheid, dat geheel buiten wiskunde, physica en astronomie omgaat, even goed tot zijn recht te doen komen als de wereldberoemde vondsten, die hij daarin deed. Met name worden zijn vele theologische onderzoekingen, die een integreerend bestanddeel van zijn levenswerk vormen, uitvoerig en duidelijk behandeld.

De schrijver beschikt over al de stylistische vermogens, die noodig waren, om een zoo moeilijk onoverzienbaar materiaal als de studie van Newton's leven oplevert, tot een leesbaar boek te verwerken. In het bijzonder is hij er in geslaagd, de gecompliceerde geschiedenis van den prioriteitsstrijd met Leibniz over de ontdekking van de infinitesimaalrekening met volkomen helderheid uiteen te zetten.

De lezer, die zich voor een meer gedetailleerde bespreking van het werk interesseert, moge verwezen worden naar een artikel van mijn hand in De Gids van October 1936, getiteld *Het leven van Isaac Newton*.

Jean Torlais. *Réaumur, un esprit encyclopédique en dehors de l'Encyclopédie. D'après des documents inédits*. Paris. Desclée de Brouwer. 1936. 447 blz.

Wie in onzen tijd den naam Réaumur hoort, denkt zeker wel het eerst en misschien zelfs wel uitsluitend aan een voor onze

hedendaagsche opvattingen onbruikbare temperatuurschaal; hoogstens zal een entomoloog nog zijn eertijds zoo beroemde *Histoire des Insectes* kennen. Overigens echter is de geheele activiteit van den man, die eens de ziel van de Parijsche Academie was en het vereerde middelpunt van een over alle beschaafde landen verspreiden kring van beoefenaren der natuurwetenschap uit de herinnering der wereld als het ware weggevaagd, een triest symptoom van haar kort geheugen.

Het mooie boek van Jean Torlais herstelt dit onrecht. Het schetst de veelzijdige werkzaamheid van den Directeur der Academie op technisch en biologisch gebied en het typeert in zijn karakteristiek van dezen grand curieux de la Nature treffend den geest der vroege 18e eeuw.

Wel verre van alleen aan Réaumur aandacht te schenken, stelt het namelijk ook die onafzienbare rij van onderzoekers of waarnemers, die met hem samenwerkten, die hun inspiratie van hem ontvingen of tot hem in betrekking stonden, in een helder licht. Het boek is daardoor tot een soort van encyclopaedie van het wetenschappelijk leven van zijn tijd geworden en verdient als zoodanig belangstelling in breeden kring. Het is met enkele interessante illustraties verlucht en wordt besloten door een uitvoerig register.

Douglas Mc Kie and Niels H. de V. Heathcote. *The discovery of specific and latent heats.* With a foreword by E. N. da C. Andrade. Edward Arnold & Co. London. 1935. 155 blz.

Dit boek verdient in het bijzonder de aandacht van docenten in physica, omdat het op heldere wijze de moeilijkheden in het licht stelt, die te overwinnen waren om te komen tot de onderscheiding van de begrippen temperatuur en hoeveelheid warmte en het werk, dat verricht moest worden om de fundamenten der calorimetrie als afzonderlijke tak der warmteleer te leggen. Voor de hedendaagsche physica zijn dit zeer elementaire zaken en daardoor onderschat men wel eens de moeilijkheden, die er voor beginners in verborgen liggen. Bestudeering van het werkje van Mc Kie en Heathcote kan er toe bijdragen, het inzicht in die moeilijkheden te verhelderen.

De schrijvers behandelen eerst de onderzoekingen van Joseph Black en daarna die van Morin, Krafft, Richmann (van hem is de

bekende formule voor de temperatuur van een mengsel afkomstig), Wilcke en Gadolin. In een slothoofdstuk wordt ingegaan op de consequenties, die de ontwikkeling van de calorimetrie voor de geschiedenis der warmteleer gehad heeft. Het geheel vormt een goed geschreven en methodisch onberispelijke behandeling van een belangrijk hoofdstuk der physica.

James Alden Thompson, *Count Rumford of Massachusetts.* New York. Farrar & Rinehart. 1935. XVI en 275 blz.

Deze nieuwe biographie van den fortuinlijken Amerikaan Benjamin Thompson, die het van winkelbediende in een klein Amerikaansch stadje tot den titel Graaf Rumford en tot de positie van minister van Beieren bracht, is geen verbetering ten opzichte van het groote werk, dat Ellis in 1871 over hem schreef. Het is natuurlijk waar, dat Ellis wat onkritisch was, niet al te competent op natuurwetenschappelijk gebied en nogal breedsprakig; J. A. Thompson, een verre naneef van zijn naamgenoot, heeft echter nog heel andere feilen: hij begrijpt van Rumford's wetenschappelijke verdiensten (die toch inderdaad aanzienlijk zijn) heelemaal niets; hij kan geen hoofdzaken van bijzaken onderscheiden; hij toont een vaak ontstellend gemis aan goeden smaak; en hij schijnt geen ander doel te hebben nagestreefd, dan zijn voorvader zoo zwart mogelijk af te schilderen. Hij schrijft over hem met een voortdurenden sneer en hij mist dus blijkbaar de eerste voorwaarde, waaraan een biograaf moet voldoen: kritische sympathie voor het object van zijn studie. Het mooi uitgevoerde boek (dat als typeerend staaltje van Amerikaansche luchthartigheid inzake de geographie van Europa op zijn schutblad de verrassende mededeeling bevat, dat Rumford eerste minister van . . . . Bulgaria zou zijn geweest) kan daarom heelemaal niet worden aangeraden.

TWEE ONJUISTE BEWIJZEN

DOOR

E. T. STELLER.

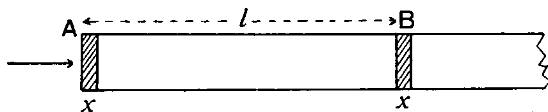
Alvorens met mijn critiek te beginnen wil ik opmerken, dat de ervaring van lesgeven, die ik heb, opgedaan werd tijdens het bijwerken van zwakke leerlingen, zoodat ik wellicht een te lage dunk heb van bevattingsvermogen van de gemiddelde leerling. Daar ik van klassikaal lesgeven in het geheel geen ervaring heb is het niet uitgesloten, dat ik moeilijkheden over het hoofd zie, die de hieronder voorgestelde wijzigingen zeer bezwaarlijk of onmogelijk maken.

De bewijzen, die ik op het oog heb zijn te vinden in: Nieuw leerboek der Natuurkunde, door Reindersma en Lohuizen, tweede deel paragraaf 171 en 265.

Om misverstand te voorkomen neem ik beide paragrafen woordelijk over.

171. Wiskundige berekening van de voortplantingssnelheid van de evenwichtsverstoring in een elastisch medium. AB stelt de stalen staaf voor, waartegen we bij A een slag met den hamer geven.

De staaf heeft een doorsnede *d* cm en een soortelijke massa



s *g*/cm³. De kracht van den stoot zij K, de tijd gedurende welke deze kracht werkt *t* (zeer klein). Het tijdseffect van de kracht is dus K*t*.

In den tijd *t* heeft de evenwichtsverstoring zich voortgeplant van A naar B over den afstand *l* cm.

De staaf wordt door den slag ingedeukt over een bedrag *x* cm, dat ook weer zeer klein is. Na afloop van den tijd *t* sec. is er niets

anders veranderd, dan dat de indeuking zich van A naar B verplaatst heeft: het is alsof de massa van de laag x zich naar B heeft verplaatst. De verplaatsingssnelheid is

$$\frac{l}{t} = v.$$

De verplaatste massa is xds gram.

De hoeveelheid van beweging is dus $xds \cdot \frac{l}{t}$.

Dus $$K \cdot t = xds \cdot \frac{l}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Wanneer nu op een staaf de kracht K werkt, wordt de indrukking bepaald door den elasticiteitsmodulus. We weten, dat de samendrukking gegeven wordt door de formule:

$$U = \frac{lK}{Ed}.$$

Voor K vinden we dus: $K = \frac{EdU}{l}$; nu is U in het bovenstaande geval x genoemd.

Dan vinden we dus voor (1)

$$\frac{E \cdot d \cdot x}{l} t = x \cdot d \cdot s \cdot \frac{l}{t}$$

$$\left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{E}{s} \text{ of } v = \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

De zin „Na afloop van den tijd t sec. is er niets anders veranderd, dan dat de indeuking zich van A naar B verplaatst heeft: het is alsof de massa van de laag x zich naar B heeft verplaatst" is onjuist. In tegendeel, gedurende den tijd t heeft de massa, die eerst uniform over l verdeeld was, zich samengetrokken en is nu uniform verdeeld over $(l—x)$, zooals o.a. blijkt uit de formule

$$U = \frac{lK}{Ed}.$$

Daarom zou ik het volgende willen voorstellen. Het zwaartepunt van de massa lds ligt vóór de stoot op een afstand $\frac{1}{2}l$ van het punt B, na de stoot op een afstand $\frac{1}{2}(l—x)$. De massa lds is dus in den tijd t verplaatst over een afstand $\frac{1}{2}x$, onder invloed van een constant werkende kracht K, dus geldt: [1])

---

[1]) Het is eenvoudiger de ligging van het zwaartepunt t.o.v. B te beschouwen, dan t.o.v. A, daar B ook na den tijd t niet van plaats is veranderd.

$$s_t = \tfrac{1}{2}at^2 \text{ of } \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{K}{lds} \cdot t^2.$$

We weten, dat $x = \dfrac{lK}{Ed}$ dus $\dfrac{lK}{Ed} = \dfrac{K}{lds} \cdot t^2$

waaruit volgt: $\left(\dfrac{l}{t}\right)^2 = \dfrac{E}{s}$.

Voor de snelheid, die het zwaartepunt, dus die de massa krijgt, vinden we:

$$V = a \,.\, t = \frac{K}{lds} \cdot l\sqrt{\frac{s}{E}} = \frac{K}{d\sqrt{Es}}.$$

In tegenstelling met de eerste afleiding zijn hier de snelheden van de evenwichtsverstoring en van de massapunten duidelijk ongelijk. Bovendien is het aardig op te merken, dat snelheid van de massapunten en dus ook de uitwijking uit den evenwichtsstand toeneemt met K en afneemt als *d*, *s* of E toenemen.

Berekenen we in beide gevallen het arbeidsvermogen van de staaf, dan vinden we in het eerste geval:

$$\text{Arb.verm.} = \tfrac{1}{2} xdsv^2 + \tfrac{1}{2}Kx = \tfrac{1}{2} xds \,.\, \frac{E}{s} + \tfrac{1}{2} Kx = \tfrac{1}{2} Kl + \tfrac{1}{2} Kx$$

in het tweede geval:

$$\text{Arb.verm.} = \tfrac{1}{2}\, lds\, V^2 + \tfrac{1}{2} Kx = \tfrac{1}{2}\, lds \,.\, \frac{K^2}{d^2Es} + \tfrac{1}{2} Kx =$$

$$= \tfrac{1}{2} K \,.\, \frac{lK}{dE} + \tfrac{1}{2} Kx = Kx$$

en dat is juist de door een kracht K over een afstand *x* verrichte arbeid.

Daar paragraaf 171 klein gedrukt is, is zij blijkbaar slechts bedoeld voor een goede klas. Nu lijkt mij — maar hier begeef ik mij op glad ijs — dat een goede leerling en zeker de aanstaande student in de wis- en natuurkunde de laatste afleiding logischer en dus gemakkelijker zal vinden.

Belangrijker is paragraaf 265, daar zij voor sterken en zwakken bestemd is.

§ 265. Hoeveelheid lading. Dichtheid der lading.

We hebben gezien, dat we een lading met een proefbolletje van

een conductor kunnen wegnemen en aan een electroscoop toevoeren. Op deze ruwe wijze kunnen we ons een oordeel vormen over de grootte van de lading, de hoeveelheid electriciteit van een electroscoop of van een conductor.

Wanneer we aan een bolvormigen geladen conductor met een proefbolletje achtereenvolgens op verschillende plaatsen lading ontnemen en aan een electroscoop, waarop een holle cylinder is geplaatst, meedeelen, krijgt deze telkens denzelfden uitslag.

De lading, die we op de verschillende plaatsen ontnemen, is dus overal gelijk.

Doen we dezelfde proef met een niet-bolvormigen geleider, dan blijkt de lading, die door het proefbolletje wordt ontnomen, niet overal dezelfde.

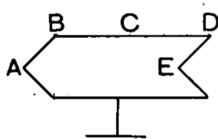


Fig. 235.

Heeft de geleider den vorm als in fig. 235, dan nemen we bij A met één proefbolletje een zeer groote, bij B een kleinere, bij C een nog kleinere, bij D weer een grootere en bij E in het geheel geen lading af.

Nu verstaan we onder de dichtheid van de lading op een bepaalde plaats, de hoeveelheid lading per cm.

Verder kan men bewijzen, dat de hoeveelheid lading, die een proefbolletje van een conductor afneemt op een bepaalde plaats, evenredig is met de dichtheid.

Dan blijkt uit de voorgaande proef, dat de dichtheid op een nietbolvormigen geleider niet overal even groot is. Op een geleider als in fig. 235 is de dichtheid bij A het grootst, bij C klein, bij E nul.

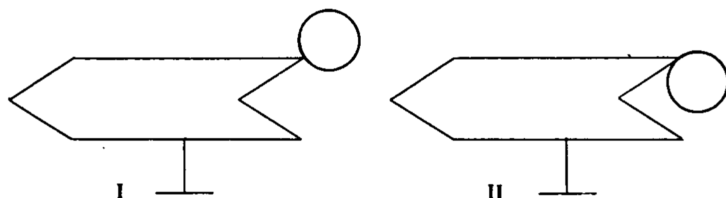
In het algemeen vindt men: De dichtheid is het grootst, waar het oppervlak het sterkst gekromd is.

Mijn bezwaren zijn de volgende.

De uitspraken in 't eerste gedeelte berusten zuiver op experimenteele gegevens, terwijl het kardinale punt van het volgende deel is gelooven op gezag, dat men — theoretisch — kan bewijzen, dat de afgenomen hoeveelheid lading evenredig is met de ladingsdichtheid. De (zwakke) leerling heeft echter blijkbaar zijn conclusie al eerder getrokken, want op mijn vraag: „Is dit een theoretisch of een experimenteel bewijs?" kreeg ik zonder uitzondering het antwoord: „Experimenteel."

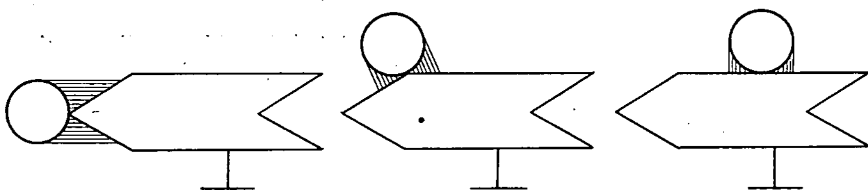
Bovendien geldt bovenbedoeld bewijs niet onder de omstan-

digheden van de proef. Immers bij de afleiding wordt aangenomen, dat de kromming van het bolletje groot is vergeleken bij de kromming van den geleider in het contact punt en omgeving, welke laatste groot moet zijn t.o.v. de afmetingen van het bolletje. Aan deze eischen is bij een spits of rand niet voldaan. Gold de stelling daar wel, dan zou het niet meevallen om een bevredigende verklaring te geven voor het verschil in opgenomen lading in onderstaande gevallen.



Tenslotte lijkt het mij wenschelijk om de laatste vet gedrukte zin te vervangen door: „De dichtheid is het grootst, waar het oppervlak het sterkst convex gekromd is." Een vraag als: „De kromming bij E is grooter dan bij B, waarom is dan de dichtheid bij B niet kleiner dan bij E?" wordt daardoor voorkomen.

Daar van het geven van een bewijs wordt afgezien, zou ik willen voorstellen de stelling voorop te zetten en dan ter illustratie de proef te geven.



Zoolang het bolletje tegen den geleider rust vormen zij één geleider en deze volgt de wet: „Sterk convex gekromd groote ladingsdichtheid, sterk concaaf gekromd, geringe ladingsdichtheid" dus hoe scherper de „hoek" tusschen bolletje en geleider, hoe grooter deel van het bolletje een geringe ladingsdichtheid krijgt, dus hoe minder lading het opneemt.

BOEKBESPREKINGEN.

EGMONT COLERUS, *Van 1 × 1 naar Integraal.* Wiskunde voor iedereen. Nederlandsche bewerking van Dr. J. A. A. Verlinden met inleiding van P. Wijdenes.

Dit boek is niet bestemd voor schoolgebruik, maar moet dienen als handleiding bij zelfstudie. Als zodanig mag het geslaagd heten, omdat het dáár, waar schoolboeken aanvulling door mondelinge uitleg onderstellen, de vereiste toelichting geeft. Bovendien zal de levendige schrijftrant de belangstelling van den lezer wakker houden, hoewel natuurlijk aan diens toewijding hoge eisen worden gesteld.

Enkele opmerkingen moeten nog worden gemaakt. Een uitspraak als: „Maar zeer zelden gaat het bezit van een groote mathematische kennis gepaard met het vermogen om op duidelijke wijze de wiskundige problemen te doceeren" (bl. 9) ware beter achterwege gebleven. Deze berust op geen enkele grond, maar zal in sommige kringen (men denke aan zekere ULO-propagandisten) gretige bijval vinden. Het is twijfelachtig, of beschouwingen, als die van blz. 140 tot de duidelijkheid zullen bijdragen. Op blz. 218 had wel mogen worden vermeld, dat de „vergelijking van Leibniz" niets is dan een definitie.

De bestudering van dit boek zal onder bepaalde omstandigheden zeker van nut zijn. Dr. Verlinden leverde een goede vertaling en behartenswaardige „raadgevingen voor verdere wiskunde-studie".

H. J. E. Beth.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff, Groningen:

NOORDHOFF'S Schooltafel 11—15e duizendtal geb. in slap linnen . . . . *f* 1,50

C. J. ALDERS, Vlakke meetkunde voor M. O. en V. H. O. 208 blz. 204 fig. gec. . . . . *f* 2,50

A. J. LIEFKENS en B. H. GERRITSMA, Onze technische serie; Algebra I . . . . *f* 0,65

P. WIJDENES, Five place tables. Decimal system. 168 blz., geb. *f* 2,50

HET NIEUWE LEERPLAN VOOR WISKUNDE (H.B.S. B).

DOOR

H. J. E. BETH.

Leerprogramma's verschijnen bij ons in beknopte vorm en zonder toelichting. Dat heeft wat voor en het heeft wat tegen. Een al te nauwkeurige omschrijving en aanwijzing zou den docent alle vrijheid van beweging ontnemen en daardoor in strijd zijn met wat een kenmerkende eigenschap van onze volksaard heet. Daar staat tegenover, dat men graag wil weten, welke overwegingen bij de samenstelling overheersend geweest zijn; waarom dus het leerplan geworden is zó en niet anders. Dit is van weinig betekenis, als het een leerplan betreft voor een *vak*school, waar immers reeds de bestemming van de leerlingen de aard van de leerstof en zelfs de vorm, waarin deze zal worden aangeboden, grotendeels bepaalt. Ze is van veel betekenis voor een school als de onze, die merkwaardig is onder meer om deze reden, dat men nu nog, dus na 75 jaar, sprekende over haar eigenlijk karakter, bijna handgemeen kan worden.

Het genoemde bezwaar geldt niet met betrekking tot het juist verschenen leerplan voor wiskunde. De ouderen onder ons zullen hierin ongetwijfeld herkend hebben het ontwerp, dat vele jaren geleden door een commissie onder mijn voorzitterschap aan het college van Inspecteurs aangeboden is. [1]) Wel zijn hier en daar kleine wijzigingen aangebracht, vooreerst enkele door ons zelf naar aanleiding van de geleverde kritiek; [2]) later nog andere op grond van ambtelijke adviezen; ten slotte veranderingen als gevolg van de gewijzigde urenindeling. Na dit alles is echter het leerplan, niet alleen in hoofdtrekken, maar ook in de uitwerking, gebleven wat het was.

---

[1]) „Euclides" Jaargang II, blz. 113.
[2]) id., Jaargang III, blz. 154.

Een verwijt, dat ons niet heeft kunnen treffen, is, dat we het leerplan in al te beknopte vorm en zonder de nodige toelichting zouden gegeven hebben. Integendeel, we hebben een ontwerp-leerplan aangeboden, dat tot in bijzonderheden uitgewerkt was en uitvoerig gemotiveerd. Niet met de bedoeling, dat het in deze gedaante als Koninklijk Besluit zou verschijnen. Maar alleen, omdat we niet van vaagheid beschuldigd wilden worden.

De uitvoerige gedachtenwisseling in Jaargang II en III van dit tijdschrift, die een gevolg was van de publicatie van het ontwerp-leerplan, zou het overbodig kunnen doen schijnen, dat nu nog, nadat over de zaak reeds beslist is, beschouwingen aan dat leerplan worden gewijd. We mogen echter niet vergeten, dat inmiddels nieuwe generaties van wiskunde-leraren zijn gekomen om onze gelederen aan te vullen, en dat we intussen weer veel nieuwe indrukken ontvangen hebben en ervaringen rijker geworden zijn. Als we op dit ogenblik opnieuw aan hetzelfde werk gezet werden, dan zou waarschijnlijk het resultaat, wat de hoofdzaken betreft, weinig van het bekende afwijken; ik vermoed echter, dat we op verschillende plaatsen de uitwerking anders zouden gemaakt hebben.

Laat ik mogen beginnen met te herhalen, wat voor onze commissie het belangrijkste was, de beginselverklaring: „Zij wenst vóór alles de vormende waarde, die van beoefening der wiskunde kan uitgaan, in het oog te houden en eerst in de tweede plaats te letten op het practische nut, dat de kennis van sommige gebieden der wiskunde voor een deel harer leerlingen later kan hebben; zij acht daarom het aanbrengen van fundamentele theoretische inzichten belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid." Anders gezegd: „Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis."

Een discussie over deze opvatting heeft geen zin meer; de autoriteiten hebben haar aanvaard blijkens het verschenen Koninklijk Besluit.

Nu is er inderdaad niet veel bezwaar gemaakt tegen onze beginselverklaring. Integendeel, men heeft er ons bij herhaling ten zeerste om geprezen. Echter had veel van die lof voor ons een onaangename bijsmaak: velen verklaarden volledig in te stemmen met het uitgesproken beginsel, maar ze verwierpen stelselmatig

alle middelen, die we in de vorm van de nadere uitwerking aanboden om het „hoofddoel" te bereiken. Dit behoeft nog niet met elkaar in strijd te zijn. Wat voor ons het ergste was: ze bleven in gebreke zelf deugdelijker middelen aan te wijzen ter bereiking van het ook door hen nagestreefde doel.

Het uitspreken van het beginsel betekende nog niet het *oplossen* van een vraagstuk; het betekende pas het *stellen* van een probleem, dat voor vele oplossingen plaats liet.

Van nature was het aantal oplossingen beperkt door de volgende gegevens: de leeftijd, waarop de leerlingen tot de school toegelaten worden; de eisen, die men algemeen aan hun begaafdheid meent te mogen stellen; en ten slotte de tijd en de inspanning, die gedurende de schooltijd voor het vak wiskunde beschikbaar zijn. *Kunstmatig* hebben we het getal oplossingen verder beperkt door de opmerking:

„Het ware een moedwillig en kortzichtig verbreken van alle contact met de werkelijkheid, indien bij de keuze uit verschillende mathematisch-vormende onderwerpen niet enigszins rekening zou mogen worden gehouden met een overweging, die het hoofddoel niet mag beinvloeden, met de vraag namelijk, hoe men den leerlingen, die later hoger onderwijs in exacte wetenschappen zullen genieten, de vaak zo moeilijke overgang van de H. B. S. tot de Hogeschool gemakkelijker kan maken."

Met het beginsel, dat ons als uitgangspunt diende, hing samen de grote betekenis, die we toekenden aan het onderwijs in de theorie van de rekenkunde, reeds dadelijk in de eerste klasse. We moeten hier de leerlingen leren, zich rekenschap te geven van de bewerkingen, die ze tot dusver machinaal hebben verricht, hen er van doordringen, dat het getalbegrip slechts door geleidelijke uitbreiding van de oorspronkelijke betekenis van het woord getal gevormd wordt, en dat het steeds de beperkte uitvoerbaarheid ener gedefinieerde bewerking in de tot op dat ogenblik bekende getallen is, die tot zulk een uitbreiding leidt. We hebben hier de taak te vervullen, de kennis, die de leerlingen al verzameld hadden volgens de methode van de empirie en der herhaalde oefening, tot een stelsel te verenigen, dat als grondslag voor de verdere ontwikkeling van de wiskunde kan dienen. Behalve, dat we hier een misschien niet te overtreffen gelegenheid vinden tot het geven

van taalonderwijs, hebben we nog een ongezochte aanleiding tot het aanbrengen van fundamentele logische begrippen als: axioma, definitie, bewijs, stelling.

Men zal zien, dat deze gedachte het gehele programma doordringt. In de tweede klasse komt de uitbreiding van het getalbegrip aan de orde naar aanleiding van de vierkantsworteltrekking. Het spreekt van zelf, dat die uitbreiding hier slechts een zeer voorlopig karakter kan hebben. Niemand zal in de tweede klasse de leerlingen rijp achten voor een theorie van het irrationale getal. Nodig is: de leerlingen te doen inzien, dat hier een uitbreiding van het getalbegrip vereist wordt en inderdaad plaats vindt, hoewel deze eerst later geheel kan begrepen worden, en dat we dus voorlopig, als we worteltekens schrijven, in de regel dingen doen, die nog niet verantwoord zijn.

We hadden ons de behandeling van een theorie van het irrationale getal gedacht in de 4de, de uitbreiding met de complexe getallen in de 5de klasse. Met het nu gepubliceerde leerplan is dit niet in strijd. Het geeft niet afzonderlijk de leerstof voor de 4de en de 5de klasse, blijkbaar om de leraren bij de verdeling van de stof over deze twee klassen enige vrijheid te laten, maar het schrijft voor: „herhaling en uitbreiding van het getalbegrip", dus: herinnering aan de vroeger tot stand gebrachte uitbreidingen, en vervolgens: invoering van de irrationale en van de complexe getallen. Ik vind het jammer, dat dit onderwerp geheel achteraan geplaatst is, omdat het daardoor de indruk wekt, dat het het laatst aan de orde behoort te komen. Ik zou dat onjuist vinden, althans wat het irrationale getal betreft. Iets anders is het voor de complexe getallen. Immers, de theorie van het irrationale getal betekent een achteraf rechtvaardigen van gepleegde handelingen, en dit moet niet langer uitgesteld worden dan noodzakelijk is. Complexe getallen hebben we *nooit* nodig gehad; ik zou de theorie hiervan in de 5de klasse dan ook als sluitsteen willen zien opgevat. Ik zou ze ook volstrekt niet vóór die tijd willen noemen, en dus bijvoorbeeld zeggen, dat een vierkantsvergelijking, als de discriminant $B^2 - 4AC < 0$ is, geen wortel heeft. Over deze zaken heb ik in dit tijdschrift vroeger uitvoerig geschreven [1]), zodat ik het er nu bij zal laten.

---

[1]) Jaargang V, blz. 10, 270.

Een belangrijk novum in het leerplan is het opnemen van de beginselen van de infinitesimaalrekening. Dit is een logisch gevolg van de overtuiging, dat het onderwijs in de algebra in de eerste plaats de ontwikkeling van het functionele denken moet nastreven. Deze overtuiging verklaart tevens het belang, dat gehecht wordt aan de grafische voorstellingen, waarmee men volgens ons concept-programma al in de eerste klasse moest beginnen. Blijkbaar om tegemoet te komen aan veler bezwaar is dit thans uitgesteld tot de tweede klasse. Ook over dit punt vindt men een uitvoerige bespreking in dit tijdschrift. [1]) In het leerplan is niet nauwkeurig aangegeven, hoe ver men met de beginselen van de infinitesimaalrekening gaan wil. Zeker is, dat men de techniek van het differentieren en het integreren tot het uiterste moet beperken, en hiervan niet meer geven dan het noodzakelijkste. Uit het feit, dat men de beginselen dienstbaar wil maken aan het onderwijs in mechanica en natuurkunde, blijkt wel, dat het vóór alles de grondbegrippen zijn, die het eigendom van den leerling moeten worden. Met de beperking van het aantal te behandelen functies kan men m.i. heel ver gaan: men zou zich zelfs tot de gehele rationale functie, sin nx en cos nx kunnen bepalen; hiermee is reeds het voornaamste te bereiken.

Terwijl we in ons concept-leerplan, behalve de lineaire en de kwadratische functie, geen andere algebraische functies noemden dan de gebroken lineaire, noemt het nieuwe leerplan ook nog $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$. Velen zullen zich enigszins verwonderd afvragen, waartoe dit moet dienen, waar zelfs de belangrijker functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ *niet* genoemd wordt. Ik geloof dat te moeten toeschrijven aan de omstandigheid, dat blijkens de eindexamenopgaven het Gymnasium in de genoemde functie veel belang stelt en men er naar streeft de programma's van H. B. S. en Gymnasium enigszins naar elkaar toe te buigen. Inderdaad kan men ook uit die functie nog wel wat leren, en stof voor oefening in de grafieken moet men toch hebben. Echter: zo ergens, dan hoede men zich *hier* voor overdrijving!

Ik vestig er de aandacht op, dat in het leerplan de stof voor

---

[1]) Jaargang IX, blz. 11.

rekenkunde en stelkunde niet gescheiden is, maar verenigd onder het opschrift „reken- en stelkunde". Daarvoor is alles te zeggen. Het is alleen op practische gronden, dat men een, en dan nog altijd kunstmatige, scheiding brengt tussen twee gebieden.

Met „eenvoudige merkwaardige quotienten" in klasse I worden bedoeld de quotienten $\frac{a^2 - b^2}{a \pm b}$ en $\frac{a^3 \pm b^3}{a \pm b}$. De algemene theorie van de merkwaardige quotienten komt pas in klasse IV aan de orde als toepassing van de reststelling.

„Algebraische behandeling van vergelijkingen van de eerste graad" in klasse I wordt bedoeld in tegenstelling met de meetkundige behandeling (naar aanleiding van de grafiek van de lineaire functie) in klasse II. Hier wijs ik nogmaals op het naar voren brengen van het begrip *functie* ten koste van het begrip *vergelijking,* waarnaar de commissie gestreefd heeft. Voor de lineaire functie is men (om bovengenoemde reden) van ons voorstel afgeweken. Wel gaat in klasse III de kwadratische functie (zoals van zelf spreekt met haar grafiek), vooraf aan de kwadratische vergelijking (en, zoals wederom van zelf spreekt, de kwadratische ongelijkheid). Immers is de vraag, wanneer een functie de waarde nul (of een andere bekende waarde) aanneemt, slechts één van de vele vragen, die men omtrent die functie kan stellen en lang niet altijd de voornaamste.

Het zal duidelijk zijn, dat „De rekenkundige reeks" in klasse II alleen bedoeld is als een van de onderwerpen, tot welker behandeling de lineaire functie aanleiding geeft. Men zal zich hier tot getallenvoorbeelden beperken, en de algemene theorie uitstellen tot klasse III, waar men met de behandeling verder kan komen en waar de behandeling tegelijk met die van de meetkundige reeksen voordelen oplevert. Bij een zo beknopte formulering van het leerplan ware het beter geweest, het onderwerp, dat hier slechts een voorbeeld betekent, niet te vermelden.

Terwijl het oude leerplan alleen sprak van de eenvoudigste „begrippen" van onnauwkeurige getallen, spreekt het nieuwe van eenvoudige „bewerkingen" met onnauwkeurige getallen. Men gaat dus op dit punt verder. Zelfs was in ons concept-leerplan hier het woord „eenvoudig" niet gebruikt; wel geeft het onze bedoeling weer. We beschouwen dit punt als zeer belangrijk; ook al met het oog op het practische rekenen, o.a. in natuurkundige vraagstukken;

de dwaasheden, die hierbij door de leerlingen vertoond worden, grenzen aan het ongelooflijke.

Wat de bewerkingen met wortelvormen betreft, hierin gaan we thans naar mijn stellige mening te ver. Deze stof heeft zeer betrekkelijke vormende waarde, en wat er van nodig is, bijvoorbeeld voor de meetkunde, is slechts gering. Het nuttig effect van de vele uren, die men er in klasse II aan opoffert, is niet groot. Dat het *begrip* hierbij een zeer ondergeschikte rol speelt, blijkt het best hieruit, dat alles verdwenen schijnt, als men het onderwerp enkele maanden heeft laten rusten; de herleiding van $\frac{2}{\sqrt{2}}$ geeft dan al enige moeite. Hierbij moet men bedenken, dat men toch eigenlijk bijna geen werkelijke problemen ontmoet, die aanleiding geven tot hogere dan vierkantswortels. In verband hiermee kan ik er veel voor voelen, in de 2de klasse geen andere wortels te behandelen dan vierkantswortels, waardoor aldaar veel complicaties vermeden worden, en de hogere wortels te laten rusten tot klasse III, waar de gebroken exponenten aan de orde komen.

Ten slotte vestig ik er de aandacht op, dat niet alleen de samengestelde interestrekening, maar ook de logarithmische en exponentiële vergelijkingen, geheel verdwenen zijn. Dit zal voor niemand betekenen, dat er niets meer van behandeld wordt. De behandeling van een logarithmische en van een exponentiële vergelijking hebben we nodig om met het begrip van logarithme, dat blijkbaar moeilijk verkregen en nog moeilijker vastgehouden wordt, te werken. Bovendien willen we toch wel eens aan het leven ontleende vraagstukken behandelen, waarvan de oplossing door het gebruik van de logarithmentafel zo eenvoudig wordt. Voor het maken van ingewikkelde en gekunstelde vraagstukken op deze gebieden bestaat nu echter geen aanleiding meer.

Voor de meetkunde vinden we eerst in de tweede klasse iets nieuws: de invoering van de goniometrische verhoudingen en het gebruik van de directe tafels. Hierdoor kan de behandeling van de berekening van lijnstukken geheel anders worden. Ik geloof, dat we op *dit* ogenblik nog een andere afwijking zouden voorgesteld hebben: de traditionele volgorde, waarbij op de congruentie de evenredige lijnstukken volgen, geeft moeilijkheden in de tweede klasse. Er is veel voor, en niets tegen, de oppervlakte te laten

vorafgaan. Voor mij is niet het voornaamste argument, dat het laatste onderwerp zo veel eenvoudiger is: ik houd er in het algemeen niet van, moeilijke zaken, als we ze ontmoeten, uit te stellen. Belangrijker is, dat we in het begin van de tweede klasse in de rekenkunde de evenredigheden behandelen, en de leerlingen tegelijkertijd met evenredige lijnstukken op het lijf vallen. Dit laatste kan veel beter gebeuren, nadat de evenredigheden afgehandeld zijn en die stof enigszins bezonken is. Door deze verandering in de volgorde wordt het stelselmatige in de behandeling der meetkunde volstrekt niet gestoord. Integendeel, uit de oppervlakten komt de stelling van Pythagoras heel natuurlijk te voorschijn, waarmee het uitgangspunt voor de berekening van lijnstukken gevonden is. De behandeling van de evenredigheden en van de gelijkvormigheid en de toepassingen hiervan kunnen door de invoering van de goniometrische verhoudingen een eenvoudiger gedaante krijgen.

De hier geschetste wijze van behandeling der meetkunde in klasse II wordt natuurlijk door het nieuwe leerplan volstrekt niet verboden; ik had het slechts wenselijk geacht, dat men door de onderwerpen aldus te rangschikken die behandeling aangemoedigd had.

Onnodig zou het kunnen schijnen nog op te merken, dat door de vroegtijdige invoering van de goniometrische verhoudingen de behandeling van de regelmatige veelhoeken belangrijk kan worden vereenvoudigd; ik krijg wel eens de indruk, dat van deze mogelijkheid te weinig gebruik gemaakt wordt.

Men zal opgemerkt hebben, dat het leerplan op verschillende plaatsen duidelijk wijst in de richting van samensmelting van de planimetrie met de trigonometrie. De gangbare scheiding van deze twee onderwerpen is even erg in strijd met het wezen van de wiskunde als de scheiding van rekenkunde en algebra.

Zo is het ook in de hogere klassen met de scheiding van stereometrie en beschrijvende meetkunde. Over dit onderwerp heb ik uitvoerig geschreven in dit tijdschrift [1]); hiernaar moge ik thans verwijzen.

Nu de beschrijvende meetkunde aan de orde is, moet ik opmerken, dat de formulering van de te behandelen leerstof de indruk

---

[1]) Jaargang X, blz. 257.

zou kunnen wekken als zou men hier een verzwaring bedoelen. Integendeel, we menen, dat dit een punt is, waar we op versobering moeten aansturen. Stellig is dit ook de mening van degenen, die het verschil van de leerprogramma's van gymnasium en h.b.s. als een fout zien. Weliswaar worden thans voor het eerst kegel, cylinder en bol genoemd, maar de bedoeling is alleen, dat men deze oppervlakken ook in de beschrijvende meetkunde *noemen* mag, wanneer men ze gebruikt, en dat de omschrijvingen, die men aanwendde, omdat men meende ze daar niet te mogen noemen, onnodig worden. „Eenvoudige ligging" betekent, dat men geen projecties en doorsnijdingen van kegels, en cylinders en bollen eist, waarbij ellipsen, hyperbolen of parabolen zouden moeten worden getekend of gebruikt.

Het is nodig, dit laatste op te merken, nu de genoemde kromme lijnen tot de leerstof zullen gaan behoren; de parabool en de gelijkzijdige hyperbool behoorden er al toe als grafieken van de kwadratische en de homografische functie. Uitdrukkelijk wordt voorgeschreven een *meetkundige* behandeling van de kegelsneden, zulks in tegenstelling met de analytische. De wenselijkheid van het standpunt van de wiskundige vorming uit zal wel niemand ons betwisten; echter is ook gedacht aan de samenhang met de andere wis- en natuurkundige vakken. Ons scheen de behandeling, bij welke men van richtcirkel (richtlijn) uitgaat, het meest aangewezen. Het spreekt echter van zelf, dat, als op deze wijze de kegelsneden behandeld zijn, men ook de behoefte zal gevoelen ze nog eens als sneden van de kegel te zien ontstaan. Voor klasse V is dan ook de stereometrische voortbrenging van de kegelsneden voorgeschreven, waarbij aan de stelling van Dandelin gedacht is.

Een vraag, die zich nog voordoet, is deze: welke methode denkt men gevolgd bij de eenvoudige inhoudsberekeningen in de 5de klasse. Dit kan zowel de traditionele meetkundige zijn als de analytische. Als de beginselen van de integraalrekening behandeld zijn is een van de meest voor de hand liggende toepassingen de berekening van de inhouden van de in het leerplan genoemde lichamen. Ik kan niet inzien, dat er tegen het laatste bezwaar zou bestaan. Het zou tijdwinst betekenen en het onderwerp terugbrengen tot de geringe afmetingen, die het behoort te hebben in verband met het hoofddoel van het onderwijs in wiskunde.

Een punt in het concept-leerplan, dat onze commissie na aan

het hart lag, *schijnt* uit het leerplan verdwenen. We begonnen de opsomming van de stof in klasse IV met „Herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde. Logische bewijzen van vroeger intuitief aanvaarde stellingen". Deze verdwijning is slechts een gevolg van het streven, de stof in zo beknopt mogelijke vorm aan te geven. Dat dit zo is, blijkt uit een onderwerp, dat wèl genoemd wordt: de beginselen van de meetkunde op de bol. Ik heb in dit tijdschrift uiteengezet [1]), dat er een klove gaapt tussen het meetkunde-onderwijs, zoals dat in de lagere klassen gegeven wordt, en dat in de 4de klasse. In verband met de leeftijd en de ontwikkeling van de leerlingen moet men in de eerste klasse zeer eenvoudig en voorzichtig beginnen. Hiertegen kan geen bezwaar bestaan, mits men in de 4de klasse een en ander goed maakt. Het onderwijs in de stereometrie, zoals men dat blijkbaar gewoonlijk geeft met een loffelijk streven naar exactheid, moet toch ergens op steunen; als het dit niet doet, brengt het meer moeilijkheid mee dan nodig is. Men heeft er ons van verdacht, dat de „meetkunde op de bol" een middel zou zijn, om op verkapte wijze de boldriehoeksmeting weer in te voeren. Niets is verder van onze bedoeling verwijderd geweest dan deze gedachte. Vooreerst hebben we nergens verkapte methoden gebruikt; maar ook stellen we op invoering van boldriehoeksmeting in het geheel geen prijs. We hebben dit laatste trouwens al in onze toelichting met nadruk verklaard. De behandeling van de meetkunde op het bolvlak wordt door ons aanbevolen om het besef te doen doordringen, dat ieder oppervlak zijn eigen meetkunde heeft. Dit nu zou weinig zin hebben, als niet in de 4de klasse, als inleiding tot de stereometrie, de planimetrie aan een herziening werd onderworpen, waarbij de tekortkomingen werden aangewezen, die de vroegere behandeling aankleefden, en niet een poging gedaan werd, tegemoet te komen aan hogere eisen van volledigheid en exactheid. De belangrijkste figuur op de bol, die nà de grote cirkel aan de orde komt, is de boldriehoek. De drievlakshoek (die we in de 4de klasse ook in het geheel niet nodig hebben), is daarom uitgesteld tot klasse V, waar hij tegelijk met de boldriehoek behandeld wordt.

Onder de genoemde onderwerpen zijn er veel, die zich althans

---

[1]) Jaargang X, blz. 57.

voorlopig niet lenen voor opgaven voor het centraal geregelde schriftelijke eindexamen. Men heeft veel vrijheid willen laten en willen afwachten, hoe het onderwijs zich zal ontwikkelen. Wil men echter voorkomen, dat alles bij het oude blijft, dan is een noodzakelijk gevolg van de invoering van dit leerplan, dat ook ten aanzien van het eindexamen ons voorstel aanvaard wordt, en *gebroken wordt met het stelsel, waarbij candidaten van een mondeling examen in wiskunde vrijgesteld kunnen worden.* Het schriftelijk examen toch zal dan slechts op een gedeelte van de leerstof betrekking hebben; bij een door allen te ondergaan mondeling onderzoek zal moeten blijken, in hoeverre de candidaten van het onderwijs in het overige deel der leerstof profijt getrokken hebben. Terwijl het bij het schriftelijk examen vooral de vaardigheid is, die op de proef gesteld wordt, zal bij het mondeling onderzoek moeten blijken, in hoeverre de leerlingen inzicht hebben verkregen in de behandelde onderwerpen.

Het programma voor mechanica is buitengewoon kort. Blijkbaar wenst men geen verandering in de thans algemeen behandelde leerstof. Alleen zien we uit het programma voor wiskunde, dat men van oordeel is, dat de beginselen der infinitesimaalrekening in de kinematica voortaan openlijk gebruikt moeten worden, en men dus redeneringen, die gebruik maken van „een verbazend klein tijdsverloop" en „een zo klein mogelijke weg" behoort te vermijden.

Verder eist het programma, dat de harmonische beweging en de begrippen arbeid en arbeidsvermogen zo spoedig mogelijk aan de orde komen. Volkomen terecht: zoals het nu is, heeft de natuurkunde niets aan de hulp, die de mechanica haar zou willen bieden; immers deze hulp komt altijd te laat. Wij hadden dit bezwaar willen opheffen, door 3 uur Mechanica in de 4de klasse te plaatsen, zodat het stoffelijke punt daarin geheel afgehandeld wordt. Blijkbaar heeft men die 3 uren in de 4de klasse niet kunnen vinden; ook kan men bezwaar gezien hebben in de omstandigheid, dat in de 5de klasse een examenvak als mechanica slechts één uur zou hebben. De harmonische beweging noemt men in de mechanica, waar ze inderdaad behoort.

In verband hiermee staat de behandeling van de functie $y = a \sin x + b \cos x$ in de goniometrie. Naar aanleiding hiervan nog een opmerking: het zou aanbeveling verdienen de functie te schrijven in de vorm $y = a \cos \varphi + b \sin \varphi$, zoals enkele schrijvers

al doen om redenen, die ieder duidelijk zijn. Het is slechts een kleinigheid, maar ook kleinigheden kunnen van betekenis zijn.

Ik betreur het, dat ik deze beschouwingen moet eindigen met een jammerklacht. Velen zullen wel met mij de stille hoop gehad hebben, dat een wijziging van het leerplan voor de H.B.S. B het leervak cosmografie weer de plaats zou gegeven hebben, waarop het recht heeft: dat het weer 2 wekelijkse lesuren zou verkregen hebben en opnieuw ingevoerd zijn als examenvak. De betekenis van dit vak is van zo verschillende zijden en zo vaak in het licht gesteld, dat het overbodig is, deze wens toe te lichten. Weliswaar is de plaatsing in de 5de klasse in enkele opzichten gunstig; wanneer men in de 5de klasse de meetkunde begint met de meetkunde op het bolvlak, dan voorkomt dat tijdverlies voor de cosmografie; de plaatsing van geometrische optica in de 3de klasse brengt mee, dat de bespreking van de instrumenten weinig tijdrovend is. Een bezwaar is echter, dat het 5de jaar zo kort is; in 1937 gaven we op 14 Mei de laatste les in de 5de klasse. We mogen niet nalaten, op deze misstand de aandacht van de autoriteiten met nadruk te blijven vestigen.

Hoewel dus door de invoering van dit nieuwe leerplan niet alle wensen in vervulling gegaan zijn, geloof ik toch te mogen zeggen, dat ze een mijlpaal betekent in de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs hier te lande. In mijn opstel „Het „„meer en meer"" wiskundig karakter der H.B. School met 5-jarigen cursus [1])," dat geschreven werd in een tijd, waarin het wiskunde-onderwijs zich in een defensieve positie had laten dringen, gaf ik als mijn mening te kennen, dat het peil van het wiskunde-onderwijs aan onze scholen in de latere jaren niet gestegen, maar op bedenkelijke wijze gedaald was. Hieruit is o.a. te verklaren, dat het scholen van ander karakter gelukte, ons onderwijs op bedriegelijke wijze na te bootsen en dat de vraag, of onze school eigenlijk niet overbodig gemaakt is, in steeds duidelijker bewoordingen gesteld werd. Ik geloof, dat door de inspanning van velen, die het met het wiskunde-onderwijs en met de H.B.S. goed menen, de laatste tijd een

---

[1]) Jaargang I, blz. 90.

kentering gebracht heeft. Wat ons nog ontbrak, was het wettelijke voorschrift, dat zou dwingen het onderwijs volgens moderne inzichten te geven.

Ik spreek de hoop uit, dat de invoering van het nieuwe leerplan de leraren veel voldoening zal geven, en dat ze het onderwijs, en daardoor de Nederlandse jeugd, ten goede zal komen.

WISKUNDE OP DE H.B.S. A.

DOOR

Dr. P. G. VAN DE VLIET.

Bij K. B. van 27 Mei j.l. is o.m. voorgeschreven, dat in de 4e en 5e klasse van de H.B.S. A elk 1 uur wiskunde gegeven moet worden, volgens het volgende leerplan:

„Herhaling van de leerstof der derde klasse; financiële rekenkunde; grafische voorstellingen."

Uit het rapport van de Studiecommissie voor de Handelswetenschappen en de Wiskunde aan de scholen voor economisch onderwijs (J. B. Wolters, Groningen, 1931), wier adviezen in genoemd K. B. voor een groot deel zijn opgevolgd, blijkt, dat in 1931 reeds 7 zelfstandige H.B.S.'en A deze urenverdeling (1,1) hadden, 2 dezer scholen gaven 1 uur in de 4e klasse (1,0); de 2 overigen gaven geen Wiskunde in klasse 4 en 5 (0,0).

Voor de Hogere Handelsscholen waren deze cijfers

1,1: twaalf scholen
1,0: één school
0,0: drie scholen,

terwijl twee scholen de verdeling 3,2 hadden; 3 anderen 2,1 en één school 2,0.

Voor de *A-afdelingen* waren de cijfers

29 scholen 0,0
11 scholen 1,0
10 scholen 1,1,

terwijl o.a. ook nog voorkwamen 0,1 en zelfs 6,0.

Aan deze chaotische, en dus ongewenste, toestand zal nu een einde komen. Tevens is het vraagpunt opgelost of het onderdeel financiële rekenkunde moet worden gegeven door den docent in de Handelswetenschappen of door dien in de Wiskunde. Voor beide mogelijkheden zijn vóór- en tegenargumenten aan te voeren, die thans echter niet meer ter zake doen. Dit onderwijs zal nu moeten

worden gegeven door een docent met wiskunde-bevoegdheid. De wiskundelessen zullen echter sterk moeten worden georiënteerd in de richting van de handelswetenschappen. Vandaar, dat, waar de personeelbezetting dit mogelijk maakt, deze lesuren wel zullen worden opgedragen aan een leraar, die èn voor wiskunde èn voor handelswetenschappen bevoegd is. Op vele scholen is dit trouwens al sinds lang het geval.

Het zal echter op andere scholen, waar men niet over een docent met beide bevoegdheden beschikt, noodzakelijk zijn. den „gewonen" wiskundeleraar met deze uren te belasten. Het is mij uit correspondentie wel gebleken, dat verschillende van deze collega's enigszins vreemd staan tegenover deze, voor hen nieuwe, taak. Het heeft daarom misschien zijn nut in dit tijdschrift uiteen te zetten, welke onderwerpen in deze lesuren behandeld kunnen worden.

a) *Herhaling van de leerstof der 3e klasse.*

Hiervoor komen in aanmerking: vierkantsvergelijking, logarithmen, rekenkundige en meetkundige reeksen.

Bij de logarithmen zal het gewenst zijn de 5 decimalige tafels te gebruiken [1]); voor zover immers de leerlingen bij hun verdere studie in de handelswetenschappen logarithmische berekeningen hebben uit te voeren, kunnen zij met 4-decimalige tafels niet veel bereiken.

Bij de reeksen schenke men aandacht aan de rekenmeetkundige reeks, terwijl ook eenvoudige behandeling van de harmonische reeks met zijn toepassing op de leer der arbitrage noodzakelijk is.

Als men tijd en lust heeft de z.g. onbepaalde vergelijkingen te bespreken, zal het handelsrekenen dat dankbaar aanvaarden.

b) *Financiële rekenkunde.* In tegenstelling met de leerstof onder a, zal dit gedeelte voor verschillende docenten terra incognita zijn. Ik heb meermalen bemerkt, dat men van dit onderwerp niet anders wist, dan dat het „iets met samengestelde interest te maken" had.

Omtrent de inhoud van dit leervak kan men zich o.a. oriënteren

---

[1]) We wijzen op **Tafel E** Logarithmen-, rente- en discontotafels 100 termijnen, 8 decimalen; tafel I en II met de percenten ¼, ½, ¾, enz. tot en met 8; tafel III—X met de percenten ½, 1, 1½, enz. tot 8. 147 blz. *f* 3,25.
Uitgave van P. Noordhoff, Groningen.

door bestudering van het volgende handboek: Prof. Dr. M. van Haaften, Leerboek der Interestrekening[1]).

Voor de leerlingen van de A-school komt voor behandeling in aanmerking:

1. *Samengestelde Interest.* Berekening van eindwaarden en contante waarden, met behulp van de rentetafels, voor een geheel aantal termijnen.

Berekening van eindwaarden en contante waarden voor een gebroken aantal termijnen, zowel met berekening van enkelvoudige interest over delen van perioden als met berekening van samengestelde interest over delen van perioden.

Berekening van tijd en procent. Gelijkwaardige procenten. Renten (ook eeuwigdurende). Alles zoveel mogelijk met rentetafels.

2. *Annuïteiten.* Berekening van de annuïteit bij achterafbetaling van rente. Verband tussen de aflossingsbestanddelen. Het samenstellen van een aflossingsplan. Annuïteitentafel. Berekening van de schuldrest.

Het samenstellen van een aflossingsplan voor een obligatielening, die volgens het Annuïteiten-systeem wordt afgelost („afgeronde aflossingsbestanddelen").

Buiten beschouwing moeten o.a. blijven de agioannuïteit; annuïteiten, die een rekenkundige reeks vormen; annuïteiten met vooruitbetaling van rente.

Last, not least:

3. *Rentabiliteitswaarden.* Definitie (contante waarde van alle bedragen, die de gezamenlijke geldschieters uit hoofde van de lening zullen ontvangen op basis van de effectieve rentevoet).

Componenten van de rentabiliteitswaarde. Berekening van de rentabiliteitswaarde van een onaflosbare lening; van een lening, die op een bepaalde datum in zijn geheel wordt afgelost; van een lening, die met gelijke bedragen wordt afgelost; van een lening, die op onregelmatige wijze wordt afgelost en van een annuïteitenlening.

Rentabiliteitswaarde van een lening met halfjaarlijkse couponbetaling en in verband hiermede (annuïteitenlening!) splitsing van de rentabiliteitswaarde in zijn componenten. Buiten beschouwing moeten o.a. blijven de berekening van het effectieve rendement, de afschrijvingen op het disagio, enz.

---

1) Uitgave P. Noordhoff. 643 blz. Ing. *f* 6,75, geb. *f* 8,—.

c) *Grafische voorstellingen.* Voor de A. leerlingen is het vooral van belang grafieken te kunnen *lezen.* Voor korte behandeling komt in aanmerking de grafiek van de lineaire functie. Lijndiagrammen. Strookdiagrammen. Men illustrere dit onderwerp met de talloze voorbeelden, die het economisch leven dagelijks biedt en sluite ook zoveel mogelijk bij het handelsrekenen aan.

De hierboven omschreven leerstof behoort momenteel nog niet tot de verplichte eindexamenstof. Het reglement laat echter toe de wiskunde als eindexamenvak in te voeren. Gewenst is, dat elke school hiertoe overgaat; liever nog, dat het eindexamenreglement in die zin gewijzigd wordt, dat de wiskunde als verplicht examenvak wordt opgenomen.

In verband met de aard der school is het dan gewenst althans het schriftelijk examen te beperken tot de financiële rekenkunde.

INHOUD VAN DE 13e JAARGANG 1936/'37.

Boekbesprekingen.
